***Практикум*: «*Формула Тейлора*».**

Если функция $f(x)$ имеет производные до $(n\ +1)$-го порядка включительно в интервале $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, то для всех x из этого интервала справедлива формула Тейлора (порядка n)

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi\in(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)-$ остаточный член в форме Лагранжа. Формула Тейлора в точке $x_0=0$ называется *формулой Маклорена.*

Пример 1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $x-2$, пользуясь формулой Тейлора.

Решение. Запишем формулу Тейлора при $x_0=2$.

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{P^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+R_n.$$

$$P(2)=11;\ P'(x)=3x^2-4x+3;\ P'(2)=7;\ P''(x)=6x-4;\ P''(2)=8;$$

$$P'''(x)=6;\ P'''(2)=6.$$

Все остальные производные равны нулю. Подставляя найденные значения производных в формулу Тейлора, получаем $P(x)=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$.

В данном случае $R_3=0$.

Пример 2. Представить функцию $y=tg\,x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Найдем производные функции $f(x)=tg\,x$ до третьего порядка включительно:

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x$; $f''(x)=2\cos^{-3}x\cdot\sin x$;

$f'''(x)=6\cos^{-4}x\cdot\sin^2x+2\cos^{-2}x$. Отсюда получаем $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем $tg\,x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. Заметим, что $f^{(4)}(0)=0$, так как функция $tg\,x$ является нечетной. Поэтому можно записать $tg\,x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$.

Пример 3. Разложить по формуле Тейлора по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^n)$ функцию $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x-3}$.

Решение. Как известно,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n),\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Следовательно,

$$\frac{4}{x^2-2x-3}=\frac{4}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)-2}-\frac{1}{(x-1)+2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{2^n}\right)+$$

$$+o((x-1)^n)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}-\ldots+\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}\right)+o((x-1)^n)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{2^k}(x-1)^k+o((x-1)^n).$$

Пример 4. Используя основные разложения, представить функцию $f(x)=\ln\cos x$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

Решение. Пользуясь разложением косинуса, получим

$$\ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=\ln(1+t),$$

где $t=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$. Теперь воспользуемся разложением логарифма

$$\ln\cos x=\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2+$$

$$+o(x^5)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^5)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$ (Очевидно, что $\frac{t^3}{3}=o(x^5)$.)

Пример 5. Вычислить приближенно $\cos 9^\circ$, ограничившись тремя членами формулы Тейлора. Оценить допущенную при этом погрешность.

Решение. $\cos 9^\circ=\cos\frac{\pi}{20}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\frac{1}{6!}(\cos x)^{(6)}\Big|_{x=\zeta}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6.$

$$\cos 9^\circ\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0{,}98769.$$

Оценим допущенную погрешность $|\alpha|=\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6\cdot|\cos\zeta|<\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6<10^{-5}$.

Пример 6. Оценить погрешность приближенной формулы

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ \text{при}\ |x|\le 0{,}2.$$

Решение. Остаточный член формулы Тейлора $R_3(x)=\frac{(-1)^3\cdot x^4}{4(1+\theta x)^4}$,

$0<\theta<1$. При $|x|\le 0,2$ найдем $|R_3(x)|\le \dfrac{0,2^4}{4}=0,0004$.

Пример 7. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}=P_n(x)$ при $0<x<1$.

Решение. Оценим $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0<\theta<1$. $|R_n(x)|\le \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\cdot tg\, x}$.

Решение. Исходя из вида знаменателя, можно предположить, что определяющую роль при вычислении этого предела должны играть члены четвертого порядка малости по сравнению с x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\cdot tg\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^3\cdot(x+o(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{=-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4+o(x)^4}=-\frac{1}{12}.$$

Заметим, что в числителе вместо $o(x^5)$ мы записали $o(x^4)$, что в нашем примере является допустимым.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(tg\, x-x)}}$.

Решение. Обозначим выражение под знаком предела через y и прологарифмируем его.

$$\ln y=\frac{1}{x(tg\, x-x)}\cdot\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right);\quad \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)}{x(tg\, x-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)-x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}=\frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(tg\, x-x)}}=e^{\frac{1}{8}}.$$

Пример 10. Используя метод неопределенных коэффициентов, представить функцию $y=tg\, x$ формулой Маклорена до члена с x^5.

Решение. Поскольку функция $tg\,x$ нечетная, то ее разложение в окрестности точки $x=0$ имеет вид $tg\,x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6)$. Так как

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)},$$

то

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6))\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right),$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = Ax + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2}\right)x^5 + o(x^6).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $A=1,\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{15}$.

Таким образом, $tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),\ x \to 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Многочлен $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ разложить по степеням $(x+1)$.

2. Применив непосредственно формулу Тейлора, разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^2)$.

3. Вычислить приближенно (взяв два члена разложения в формуле Маклорена) $\sqrt[3]{10}$.

4. Функцию $f(x) = a \cdot ch\frac{x}{a}$, $a > 0$ в окрестности точки $x=0$ приближенно заменить параболой второго порядка.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\,x + 2\sin x - 3x}{x^4}$. **Отв.:** 0.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\ln(1+\sin^4 x)}$. **Отв.:**.

6. Известно, что $f(x)$ – многочлен четвертой степени, причем $f(1)=1$, $f'(1)=2$, $f''(1)=0$, $f'''(1)=f^{(4)}(1)=12$. Найти $f''(2)$ и $f'''(0)$.

7. Для функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ найти $f^{(10)}(0)$.

Ответы: 1. $P_4(x) = 1 + 4(x+1) - 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4$;

2. $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$; **3.** 2,17; **4.** $f(x) = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2),\ x \to 0$; **5.** а) 0; б) $\frac{1}{3}$; **6.** $f''(2) = 18,\ f'''(0) = 0$; **7.** -945.

Монотонность и экстремумы функций. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a, $в$), если для любых $x_2 > x_1,\ x_2,\ x_1 \in (a,b)$ выполняется неравенство

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right).$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ для всех $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a,\ b)$.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \left(f(x) > f(x_0)\right).$$

Точки локального минимума и максимума функции называются ее точками локального экстремума.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то производная функции в этой точке равна нулю либо не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума функции. Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

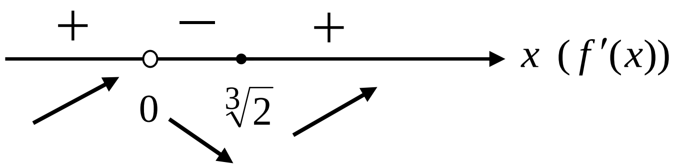
Если производная $f'(x)$ одного знака слева и справа от точки x_0, точка x_0 не является точкой экстремума.

Второе достаточное условие экстремума функции. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = 0$, то при условии $f''(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой минимума функции, при условии $f''(x_0) < 0$ точка x_0 является точкой максимума функции. В случае $f''(x_0) = 0$ требуется дополнительное исследование.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то ее наибольшее (наименьшее) значение на данном отрезке достигается либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ и точки экстремума.

Решение. Область определения функции $x \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$. На каждом из бесконечных интервалов функция дифференцируема $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^3 - 2}{x^3}$. $f'(x) = 0$ при $x_0 = \sqrt[3]{2}$. Точка $x_0 = \sqrt[3]{2}$ разбивает область определения данной функции на три интервала: $(-\infty;\, 0), (0;\, \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2};\, +\infty)$. В каждом из интервалов производная сохраняет постоянный знак.



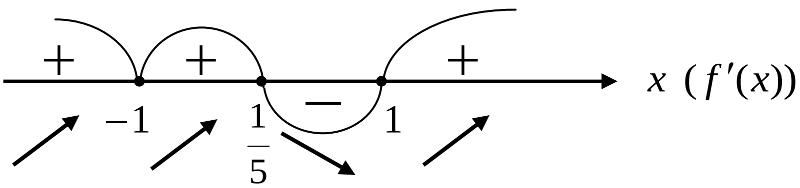
На интервалах $(-\infty;\, 0)$ и $(\sqrt[3]{2};\, +\infty)$ функция возрастает. На интервале $(0;\, \sqrt[3]{2})$ функция убывает. Точка $x = \sqrt[3]{2}$ является точкой минимума.

Замечание. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x = \sqrt[3]{2}$, то эту точку можно присоединить и к промежутку возрастания, и к промежутку убывания функции. Окончательно функция возрастает на промежутках $(-\infty;\, 0)$ и $[\sqrt[3]{2};\, +\infty)$ и убывает на промежутке $(0;\, \sqrt[3]{2}]$. В точке $x = \sqrt[3]{2}$ функция достигает минимума.

Пример 2. Найти промежутки возрастания, убывания и точки локальных экстремумов функции $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)^3$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема на $(-\infty;\, +\infty)$. $f'(x) = (x-1) \cdot (x+1)^2 \cdot (5x-1)$. $f'(x) = 0,\ x_0 = 1,\ x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{1}{5}$.

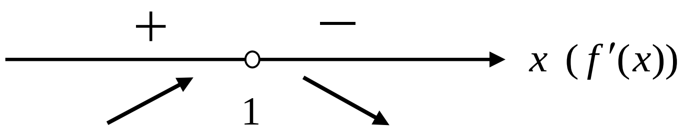
Определяем знаки производной на интервалах $(-\infty;\, -1),\ \left(-1;\, \dfrac{1}{5}\right), \left(\dfrac{1}{5};\, 1\right)$ и $(1;\, +\infty)$.



$f'(x) > 0$ на следующих промежутках: $(-\infty; -1)$; $\left(-1; \frac{1}{5}\right)$; $(1; +\infty)$. Так как точки $-1; \frac{1}{5}; 1$ являются точками непрерывности функции, то функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$ и $[1; +\infty)$. Функция убывает на промежутке $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$. Точка $x = \frac{1}{5}$ является точкой максимума функции, точка $x = 1$ является точкой локального минимума.

Пример 3. Найти промежутки возрастания, убывания и точки локальных экстремумов функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение. Функция непрерывна при всех значениях x, $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.



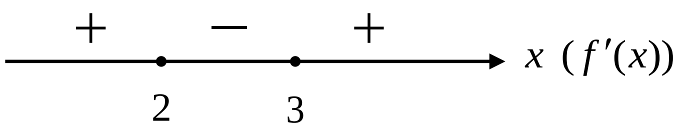
В точке $x = 1$ производная не существует. Но так как в этой точке функция непрерывна, то функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, функция убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой локального максимума (острый максимум).

Пример 4. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10$.

Решение. Находим производную функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3),$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 2, x_2 = 3$. Эти точки являются критическими. Экстремумы могут быть только в этих точках.



Так как в окрестности $x_1 = 2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «–», то $x_1 = 2$ является точкой максимума. Для точки $x_2 = 3$ знак первой производной изменяется с «–» на «+», т. е. $x_2 = 3$ – точка минимума. Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Найдем вторую производную и вычислим значения второй производной в критических точках: $f''(x) = 12x - 30$, $f''(2) = -6 < 0$ и $f''(3) = 6 > 0$, т. е. $x_1 = 2$ – точка максимума, а $x_2 = 3$ – точка минимума. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 18$ и $f(3) = 17$.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна при всех $x\in R$.

$$f'(x)=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}},\ x\neq 1,\ x\neq 2.$$

В точках $x=1$ и $x=2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x_1=1,\ x_2=\frac{4}{3},\ x_3=2$. При переходе через точку $x=1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x_1=1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_2=\frac{4}{3}$ производная меняет знак с «–» на «+», поэтому в точке $x_2=\frac{4}{3}$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x_3=2$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому $x_3=2$ – точка острого максимума. Минимум функции равен $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, а максимум – $f(2)=0$.

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[1;4]$.

Решение. Найдем критические точки функции, принадлежащие отрезку $[1;4]$, для чего производную функции приравняем к нулю: $y'=3x^2-6x=0$. Получим, $x_1=2,\ x_2=0$ (эта точка не принадлежит данному интервалу).

Поскольку наибольшее, наименьшее значения функции достигаются либо в критических точках, либо в границах интервала, необходимо найти значение функции в этих точках и выбрать из них наибольшее и наименьшее: $f(1)=3,\quad f(4)=21,\quad f(2)=1$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 21 и достигается в точке $x=4$, наименьшее значение равно 1 и достигается в точке $x=2$.

Пример 7. Из куска жести размером 16 х 30 см необходимо изготовить коробку (без крышки) наибольшего объема, вырезая равные квадраты по углам листа и затем загибая их для образования боковых стенок коробки. Найти размеры коробки.

Решение. Площадь основания коробки будет равна $S=(16-2x)(30-2x)$, а высота равна x, где x – сторона вырезаемого квадрата. Тогда объем $V=S\cdot x=(16-2x)(30-2x)x$. Исследуем функцию V на экстремум, учитывая, что $0<x<8$. Найдем производную: $V'=12x^2-184x+480=0$. Получим $x_1=\frac{10}{3},\ x_2=12$, но 12 больше 8. Точка

$\frac{10}{3}$ является точкой максимума функции V, так как $V''\left(\frac{10}{3}\right)=-104<0$. Стороны основания коробки – $\frac{28}{3}$ и $\frac{70}{3}$, высота равна $\frac{10}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить интервалы монотонности функций:

а) $y=x^3-3x+5$; б) $y=\frac{x^2+1}{x}$; в) $y=2x^2-\ln x$.

2. Доказать, что $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$, если $x>0$.

3. Исследовать на экстремум функции:

а) $y=(1-x^2)^3$; б) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$; в) $y=x^2\cdot e^{-x}$.

4. Пользуясь второй производной, выяснить характер экстремумов функции $y=2\sin x+\cos 2x$.

5. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию $y=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $x\in[0;1]$; б) $y=2\sin x+\sin 2x$, $x\in\left[0;3\pi/2\right]$.

7. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения будет наибольшей?

8. Два корабля плывут с постоянными скоростями $V_1=20$ км/ч и $V_2=30$ км/ч по прямым, угол между которыми $60°$ в направлении точки пересечения этих прямых. Найдите наименьшее расстояние между кораблями, если в начальный момент времени расстояния кораблей от точки пересечения прямых были соответственно 10 и 20 км.

Ответы: 1. а) на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция возрастает, на $(-1;1)$ – убывает; б) на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция возрастает, на $(-1;0)$ и $(0;1)$ – убывает; в) на $\left(0;1/2\right)$ функция убывает, на $\left(1/2;+\infty\right)$ – возрастает; **3.** а) $y_{\max}=y(0)=1$; б) $y_{\min}=y(\pm 2)=4$; в) $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$; **4.** $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$ – точки максимума, $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{3\pi}{2}$ – точки минимума.

$T=2\pi$; **5.** точка $x=0$ не является точкой экстремума; **6.** а) $3, \frac{1}{3}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2$; **7.** $2\pi/3$; **8.** $\frac{5\sqrt{21}}{7}$ км.